پاسخنامه تشریحی فصل بیست و دوم

آزمون جامع ۱

۱. گزینه‌ی «۳» می‌دانیم که حجم یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h از رابطه‌ی $V=\pi r^2 h$ به‌دست می‌آید، پس با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

$$\begin{cases} r=2+E_1 \\ h=3+E_2 \end{cases} \Rightarrow V=\pi(2+E_1)^2(3+E_2)$$

$$=\pi(4+4E_1+\cancel{E_1^2}^{\simeq 0})(3+E_2)$$

$$\Rightarrow V=\pi(4+4E_1)(3+E_2)=\pi(12+4E_2+12E_1+4E_1E_2)$$

عبارت E_1E_2 هم در مقایسه با E_1 و E_2 کوچک‌تر بوده و در نتیجه مدل حجم به فرم زیر می‌باشد:

$$V=12\pi+4\pi E_2+12\pi E_1=12\pi+\pi\underbrace{(4E_2+12E_1)}_{E'}$$

$$\Rightarrow E'=4(E_2+3E_1)$$

۲. گزینه‌ی «۳»

فراوانی تجمعی داده‌ی ۴ از مجموع فراوانی مطلق آن با دسته‌های قبلی به‌دست می‌آید، پس:

$$FC_4=x+5+y+3=8+x+y=17\Rightarrow x+y=9(*)$$

از طرفی می‌دانیم که درصد فراوانی نسبی دسته‌ی i اُم از رابطه‌ی $P_i=\frac{f_i}{n}\times 100$ به‌دست می‌آید که در این رابطه n همان مجموع کل فراوانی‌هاست، پس:

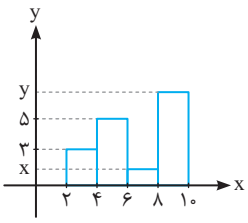
$$P_4=\frac{f_4}{n}\times 100\Rightarrow 20=\frac{x}{3+y+5+x+3}\times 100$$

$$\xrightarrow{\div 20}\Rightarrow 1=\frac{x}{(x+y)+11}\times 5\xrightarrow{(*)}1=\frac{x}{9+11}\times 5$$

$$\Rightarrow 20=5x\Rightarrow x=4\xrightarrow{(*)}4+y=9\Rightarrow y=5$$

۳. گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم که سطح زیر نمودار چندبر فراوانی و مستطیلی با هم برابر است، پس به جای نمودار چندبر فراوانی، نمودار مستطیلی داده را به‌طور فرضی رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، مساحت زیر نمودار برابر است با:



$$S=S_1+S_2+S_3+S_4$$

$$32=2\times 3+2\times 5+2\times x+2\times y$$

$$\xrightarrow{y=3x\,(*)}32=6+10+2x+2(3x)$$

$$\Rightarrow 32=16+8x\Rightarrow 16=8x\Rightarrow x=2\xrightarrow{(*)}y=3\times 2=6$$

حال جدول را به‌صورت زیر نمایش داده و طبق فرمول $\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ میانگین را به‌دست می‌آوریم:

x_i	۳	۵	۷	۹
f_i	۳	۵	۲	۶

$$\bar{x}=\frac{3\times 3+5\times 5+7\times 2+9\times 6}{3+5+2+6}$$

$$=\frac{9+25+14+54}{16}=\frac{102}{16}=6\frac{6}{16}=6\frac{3}{8}$$

۴. گزینه‌ی «۴»

فراوانی نسبی دسته‌ی iاُم از رابطه‌ی $\bar{f}_i=\frac{f_i}{n}$ به‌دست می‌آید، پس با توجه به داده‌های جدول داریم:

$$n=f_1+f_2+f_3=a+5+b=a+b+5\Rightarrow n=a+b+5\quad(1)$$

$$\bar{f}_2=\frac{5}{a+b+5}=0/25\Rightarrow\frac{5}{a+b+5}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a+b+5=20\Rightarrow a+b=15\quad(2)$$

$$\bar{f}_3=\frac{b}{a+b+5}=0/4\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{b}{15+5}=\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{20}=\frac{4}{10}\Rightarrow b=8\xrightarrow{(2)}a=7\quad(3)$$

$$\bar{f}_1=\frac{a}{a+b+5}=c\xrightarrow{(3),(2)}\frac{7}{15+5}=c\Rightarrow c=\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=0/35$$

$$\Rightarrow a+b\times c=7+8\times 0/35=7+2/80=9/8$$

۵. گزینه‌ی «۱» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۴» خورده.

اگر طول دسته را با C و مرکز دسته‌ها را با x_i نمایش دهیم، داریم: $x_i+(j-i)\times C\ (*)$

$$\begin{cases} x_3=31 \\ x_7=55 \end{cases}\xrightarrow{(*)}x_7=x_3+(7-3)\times C\Rightarrow 55=31+4C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55-31=4C\Rightarrow 24=4C\Rightarrow C=6$$

با توجه به رابطه‌ی $k=\frac{R}{C}$ داریم:

$$k=\frac{70}{6}=11/6\rightarrow k_{min}=12$$

چون تعداد دسته‌ها ۱۱/۶ شد، نتیجه می‌گیریم که ۱۱ دسته گنجایش کل داده‌ها را ندارند، پس باید داده‌های اضافی را در دسته‌ی دوازدهم قرار دهیم، پس کران بالای دسته‌ی آخر یعنی کران بالای دسته‌ی دوازدهم است، لذا داریم:

$$\begin{cases} i=7 \\ j=12 \end{cases}\xrightarrow{(*)}x_{12}=x_7+(12-7)\times C\Rightarrow x_{12}=55+5\times 6=85$$

و در نتیجه داریم:

نصف طول دسته+ مرکز دسته‌ی ۱۲= کران بالای دسته‌ی ۱۲

$$\Rightarrow b_{12}=85+\frac{6}{2}=88$$

۶. گزینه‌ی «۴» میانه، مرکز دسته‌ای است که دارای بیش‌ترین فراوانی باشد، پس میانه برابر ۵ است. برای محاسبه‌ی میانگین داریم:

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۳\times۲+۵\times۴+۱۰\times۵+۲\times۷+۴\times۹}{۳+۵+۱۰+۲+۴}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{۶+۲۰+۵۰+۱۴+۳۶}{۲۴}=\frac{۱۲۶}{۲۴}=\frac{۲۱}{۴}=۵/۲۵$$

پس مجموع میانگین و میانه ۱۰/۲۵ است.

۷. گزینه‌ی «۱» می‌دانیم که هرگاه تمام داده‌های آماری با هم برابر باشند، واریانس داده‌ها برابر صفر است و بالعکس.

۸. گزینه‌ی «۴» چون دامنه‌ی تغییرات صفر است، پس همه‌ی داده‌ها با هم برابرند و می‌دانیم که اگر همه‌ی داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین نیز برابر یکی از داده‌هاست، پس میانگین برابر $(۲x_۱+۱)$ است.

۹. گزینه‌ی «۴» کافی است هر ۴ گزینه را محاسبه نماییم:

$$۱)\ \bar{x}=\frac{۷+۵+۴+۳+۱}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$۲)\ \text{میانه}=۴$$

$$۳)\ \sigma^۲=\frac{۱^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲+۷^۲}{۵}-۴^۲$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

پس گزینه‌های ۱ و ۲و ۳ با هم برابرند و تنها ضریب تغییرات با بقیه متفاوت است. پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

۱۰. گزینه‌ی «۲» طبق فرمول $\alpha_i=\frac{f_i}{n}\times۳۶۰^\circ$ داریم:

$$۴۵^\circ=\frac{۱۲}{n}\times۳۶۰^\circ\Rightarrow n=\frac{۱۲\times۳۶۰^\circ}{۴۵^\circ}=\frac{۱۲\times۸}{۱}=۹۶$$

آزمون جامع ۲

۱. گزینه‌ی «۳»

۲. گزینه‌ی «۲»

ابتدا قبل از اضافه کردن ۵ داده، زاویه‌ی متناظر با دسته‌ی دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha_۲=\frac{f_۲}{n}\times۳۶۰^\circ\Rightarrow \alpha_۲=\frac{۶}{۳+۶+۴+۲}\times۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_۲=\frac{۶}{۱۵}\times۳۶۰^\circ=۶\times۲۴=۱۴۴^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{بعد از اضافه شدن ۵ داده}}\alpha'_۲=\alpha_۲-۱۸^\circ=۱۲۶^\circ$$

توجه داشته باشید که با اضافه شدن ۵ داده به کل داده‌ها هم ۵ واحد اضافه می‌شود ولی تعداد داده‌های دسته‌ی دوم نامعلوم است، لذا داریم:

$$\alpha'_۲=\frac{f'_۲}{n+۵}\times۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۲۶=\frac{f'_۲}{۱۵+۵}\times۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۲۶=\frac{f'_۲\times۳۶۰}{۲۰}$$

$$\Rightarrow ۱۲۶=f'_۲\times۱۸\Rightarrow f'_۲=\frac{۱۲۶}{۱۸}=۷$$

۳. گزینه‌ی «۳»

با توجه به داده‌های نمودار ساقه و برگ داریم:

$$\begin{cases}x_{min}=۲۱\\x_{max}=۴۶\end{cases}\Rightarrow R=۴۶-۲۱=۲۵$$

$$\begin{cases}R=۲۵\\k=۵\end{cases}\Rightarrow C=\frac{R}{k}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

حال جدول فراوانی مربوط به نمودار ساقه و برگ را تشکیل می‌دهیم:

حدود دسته‌ها	۲۱−۲۶	۲۶−۳۱	۳۱−۳۶	۳۶−۴۱	۴۱−۴۶
مرکز دسته‌ها	۲۳/۵	۲۸/۵	۳۳/۵	۳۸/۵	۴۳/۵
فراوانی مطلق	۴	۲	۲	۳	۴

بیش‌ترین عرض، مربوط به دسته‌های اول و آخر است یعنی نقاط (۲۳/۵,۴) یا (۴۳/۵,۴).

۴. گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم که وقتی به تمام داده‌ها عددی اضافه می‌شود به میانگین نیز آن عدد اضافه شده ولی واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کند، پس:

$$\begin{cases}\bar{x}_۱=۵\\\sigma_۱=۱/۴\end{cases}\xrightarrow{x_۲=x_۱+۹}\begin{cases}\bar{x}_۲=۵+۹=۱۴\\\sigma_۲=۱/۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow CV_۲=\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}=\frac{۱/۴}{۱۴}=۰/۱$$

۵. گزینه‌ی «۴»

داده‌ها تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۱ را داده‌اند، پس طبق نکات درسنامه داریم:

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_n}{۲}=\frac{(n+۱)+(n+۱۳)}{۲}=\frac{۲n+۱۴}{۲}=n+۷$$

۶. گزینه‌ی «۳»

طبق فرمول میانگین ابتدا مجموع نمرات این دانش‌آموز را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}\Rightarrow ۱۴/۵=\frac{\sum x_i}{۱۲}\Rightarrow \sum x_i=۱۲\times۱۴/۵=۱۷۴$$

حال اگر نمره‌ی ۲۰ را حذف نماییم، مجموع نمرات ۱۱ درس او برابر ۱۵۴ خواهد شد که میانگین نمره‌ی یازده درس دیگر او برابر است با: $\bar{x}=\frac{۱۵۴}{۱۱}=۱۴$

۷. گزینه‌ی «۳»

مجموع همه‌ی زوایا در نمودار دایره‌ای باید ۳۶۰° باشد، پس: $\alpha=۶۸^\circ\Rightarrow ۶۸^\circ+۹۵^\circ=۳۶۰^\circ$

حال با توجه به فرمول، فراوانی دسته‌ی سوم را می‌یابیم: $۶۸=۴f_۳\Rightarrow f_۳=۱۷\Rightarrow \frac{f_۳}{۴}\times۳۶۰^\circ$

۸. گزینه‌ی «۱»

هرگاه n داده‌ی آماری تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d را بدهند، مقدار واریانس از رابطه‌ی $(\frac{n^۲-۱}{۱۲})d^۲$ به‌دست می‌آید، لذا:

$$a-۳,a+۱,a+۵\xrightarrow[n=۳]{d=۴}\sigma_۱^۲=\frac{۳^۲-۱}{۱۲}\times۴^۲=\frac{۸}{۱۲}\times۱۶=\frac{۳۲}{۳}$$

$$a-۲,a-۱,a,a+۱,a+۲\xrightarrow[n=۵]{d=۱}\sigma_۲^۲=\frac{۵^۲-۱}{۱۲}\times۱^۲=۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}=\frac{\frac{۳۲}{۳}}{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

۹. گزینه‌ی «۲»

۱۰. گزینه‌ی «۴»